Optimisation multicritère partie 1

Lennard, Consultant Ingénieur Go Concept Lyon,

1 Introduction

Dans notre existence quotidienne, nous sommes sans cesse à la recherche de l'optimum. Qu'il s'agisse de trouver le chemin le plus efficace pour se rendre au travail, de choisir le moment idéal pour prendre des décisions importantes ou de viser un équilibre entre travail et loisirs, l'optimisation joue un rôle central dans notre vie. Mais nous sommes souvent confrontés au défi de poursuivre plusieurs objectifs en même temps. Comment pouvons-nous trouver l'équilibre entre efficacité et qualité, entre temps et coûts, entre vie professionnelle et vie privée ? Dans cet article, nous allons nous plonger dans le monde de l'optimisation et plus particulièrement dans les méthodes qui nous permettent de trouver le meilleur équilibre possible entre différents objectifs à l'aide d'une optimisation multicritère.

2 Les bases de l'optimisation

L'optimisation est une branche des mathématiques appliquées et trouve des applications pratiques réussies dans les sciences de l'ingénieur ainsi que dans de nombreux autres domaines [1]. Une procédure d'optimisation comprend dans tous les cas trois composants élémentaires. Le **modèle d'optimisation** décrit le problème d'optimisation en général en définissant les objectifs, les restrictions, les paramètres fixes et les variables de conception variables. Le **modèle d'analyse**, deuxième composant élémentaire, détermine les valeurs de la fonction objectif en fonction des valeurs choisies pour les variables de conception. Enfin, **l'algorithme d'optimisation**, en tant que troisième composant élémentaire, propose de nouvelles valeurs des variables de conception sur la base des valeurs de la fonction cible, qui sont introduites dans le modèle d'analyse à l'étape d'itération suivante [2]. Le déroulement schématique d'un processus d'optimisation est illustré dans la Figure 1.

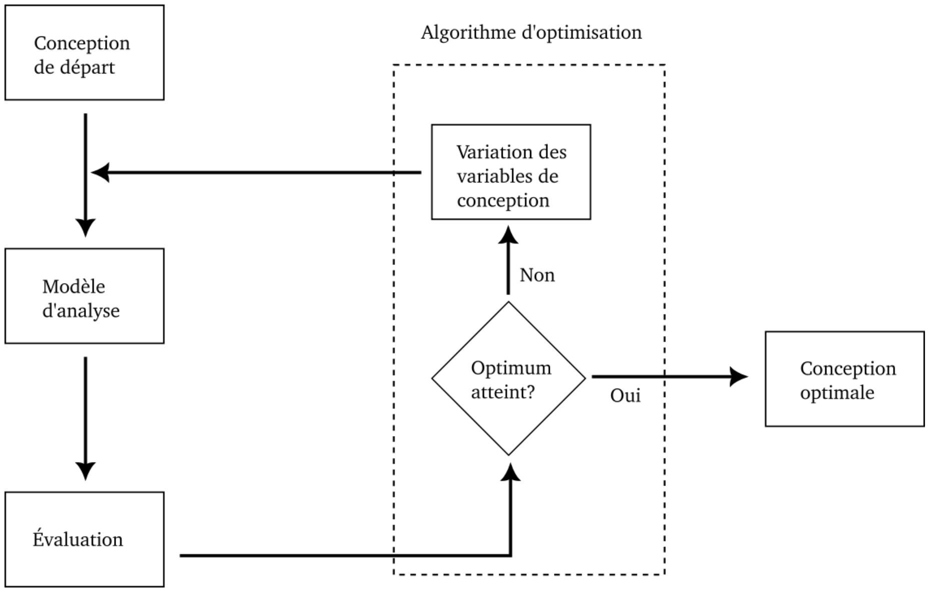

Figure 1: Déroulement d'un processus d'optimisation

Un exemple très simple consiste à minimiser le résultat de l'addition de deux nombres. Le modèle d'optimisation décrit que l'objectif est la minimisation et qu'il existe deux variables de conception, qui peuvent par exemple avoir chacune des valeurs comprises entre 1 et 10. Le modèle d'analyse donne la somme des deux nombres comme valeur de la fonction cible en se basant sur les valeurs des deux variables de conception. Dans le cas considéré, il n'y a qu'une seule fonction cible. L'algorithme d'optimisation fait alors varier les variables de conception et obtient à la fin de l'optimisation le résultat suivant : la valeur 1 est optimale pour les deux variables de conception et on obtient ainsi une valeur de fonction cible minimale possible de 2, qui représente la solution optimale de notre problème d'optimisation considéré.

2.1 Description mathématique

Dans les problèmes d'optimisation monocritère, il existe exactement une fonction cible. Un modèle d'optimisation monocritère peut être exprimé mathématiquement à l'aide des formules suivantes. f représente la fonction cible qui doit être minimisée et $\boldsymbol{x}$ le vecteur des variables de conception. L'espace de solution autorisé peut être limité par des restrictions d'inégalité g_j, des restrictions d'égalité h_k et des limites inférieures ou supérieures pour les différentes variables de conception (x_i^L et x_i^U). Souvent, on renonce aux restrictions d'égalité lors de la définition d'un problème d'optimisation, car elles peuvent être remplacées par deux restrictions d'inégalité et que tous les algorithmes d'optimisation ne peuvent pas gérer les restrictions d'égalité [3].

$$\text{minimiser } f(\boldsymbol{x}), \text{ de sorte que} \tag{2.1}$$

$$g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0; \text{ pour tout } j = 1 \dots m \tag{2.2}$$

$$h_k(\boldsymbol{x}) = 0; \text{pour tous les } k = 1 \dots q \tag{2.3}$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U; \text{pour tous les } i = 1 \dots n \tag{2.4}$$

2.2 Types d'algorithmes d'optimisation

L'algorithme d'optimisation est responsable de la résolution du problème d'optimisation. Il existe un grand nombre de configurations différentes de ces algorithmes qui, selon HARZHEIM, peuvent être classés en trois catégories supérieures. Il y a d'abord les méthodes basées sur le gradient, qui suivent la structure du modèle d'analyse dans la direction du gradient le plus abrupt. La deuxième catégorie supérieure comprend les procédures d'optimisation globale, dans lesquelles d'autres directions que celle du gradient maximal peuvent être suivies. Pour ce faire, l'algorithme intègre souvent une composante aléatoire. Enfin, il y a les algorithmes qui définissent un ou plusieurs critères d'optimalité pour l'optimum et qui tentent de trouver ces critères par des procédés heuristiques itératifs [3].

La complexité du problème d'optimisation joue un rôle important dans le choix d'un algorithme d'optimisation. Un problème d'optimisation peut n'avoir qu'un seul minimum, mais il est également possible qu'il y ait plusieurs minima locaux. S'il y a plusieurs minima locaux, les algorithmes d'optimisation basés sur le gradient risquent de ne trouver qu'un des minima locaux et non le véritable minimum global. En général, il n'est pas toujours possible de garantir que le minimum global sera effectivement trouvé dans une tâche d'optimisation [2].

3 Optimisation multicritère

Après avoir examiné les problèmes d'optimisation avec une fonction objectif, nous nous pencherons sur les problèmes d'optimisation multicritères (POM). La structure mathématique d'un POM correspond à la structure d'un problème d'optimisation monocritère. La seule différence réside dans le fait qu'au lieu d'une seule fonction cible, m fonctions cibles différentes sont évaluées. Chaque fonction cible individuelle projette l'espace $\mathbb{R}^n$ des n variables de conception sur l'espace $\mathbb{R}$. La fonction cible d'un problème d'optimisation multicritère avec m fonctions cibles assure ainsi la projection $f\colon\ \mathbb{R}^n \ \rightarrow \mathbb{R}^m$. L'espace $\mathbb{R}^m$ est alors appelé espace cible [4].

Les différences fondamentales par rapport à une optimisation monocritère résident dans le fait qu'il n'existe généralement pas de solution optimale unique qui minimise toutes les fonctions cibles considérées. Au lieu de cela, l'une des valeurs de la fonction objectif s'améliore généralement, tandis que l'autre valeur de la fonction objective se détériore. Imaginons par exemple qu'à l'école, nous ayons deux jours pour nous préparer à un examen de mathématiques et à un examen de français. Plus nous étudions une matière, meilleure sera la note que nous obtiendrons. Avec le temps limité dont nous disposons, la note de français sera donc moins bonne si nous consacrons plus de temps à la préparation de l'examen de mathématiques et inversement. Nous sommes confrontés à ce que l'on appelle un conflit d'objectifs.

3.1 Dominance

Pour l'examen suivant de la solution d'un POM caractérisé par plusieurs fonctions cibles généralement en concurrence les unes avec les autres, la notion de dominance est importante. Un point x_1 domine un point x_2 si, par rapport à toutes les m fonctions cibles, on a [5] :

$$f_k(x_1) \leq f_k(x_2) \text{ pour tous les } k = 1, \dots, m \tag{3.1}$$

$$f_k(x_1) < f_k(x_2) \text{ pour au moins un } k = 1, \dots, m \tag{3.2}$$

En d'autres termes, au moins une valeur de la fonction objective de x_1 est meilleure que celle de x_2, tandis que toute autre valeur de la fonction objective de x_1 est au moins aussi bonne que celle de x_2. La Figure 2 en donne un exemple. Les points x_1 et x_2 dominent les autres points et sont donc non-dominés. Les points x_3 et x_4 sont uniquement dominés par des points non-dominés et dominent à leur tour le point x_5, qui est dominé par tous les autres points. Il convient de rappeler que les fonctions cibles d'un problème d'optimisation sont généralement minimisées, c'est pourquoi les points en bas à gauche de la figure ci-dessous sont meilleurs que les points en haut à droite.

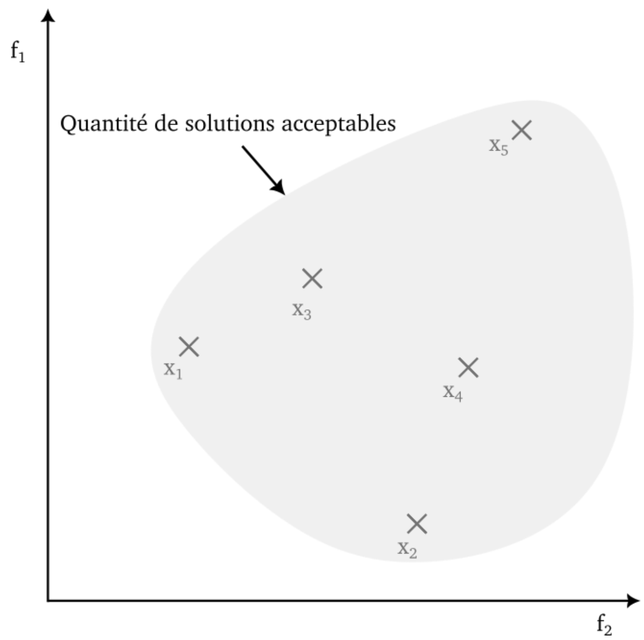

Figure 2: Dominance des solutions possibles

3.2 Optimalité de Pareto

Conformément à la formulation de la dominance, une solution possible est dite optimale de Pareto, non-dominée ou efficace s'il n'existe aucune autre solution qui améliore la valeur d'au moins une fonction cible sans dégrader simultanément la valeur d'au moins une autre fonction cible [6].

L'ensemble de tous les points efficaces est appelé front de Pareto. Il n'est généralement pas possible de trouver une formulation analytique pour l'évolution du front de Pareto. La procédure générale pour trouver le front de Pareto d'un POM consiste à générer le plus grand nombre possible de points situés dans l'espace de décision et à sélectionner ensuite les points Pareto optimaux [7]. La Figure 3 illustre un exemple d'évolution d'un front de Pareto des solutions admissibles dans l'espace cible. Les bords marqués représentent les points Pareto-optimaux de l'espace cible et donc le front de Pareto.

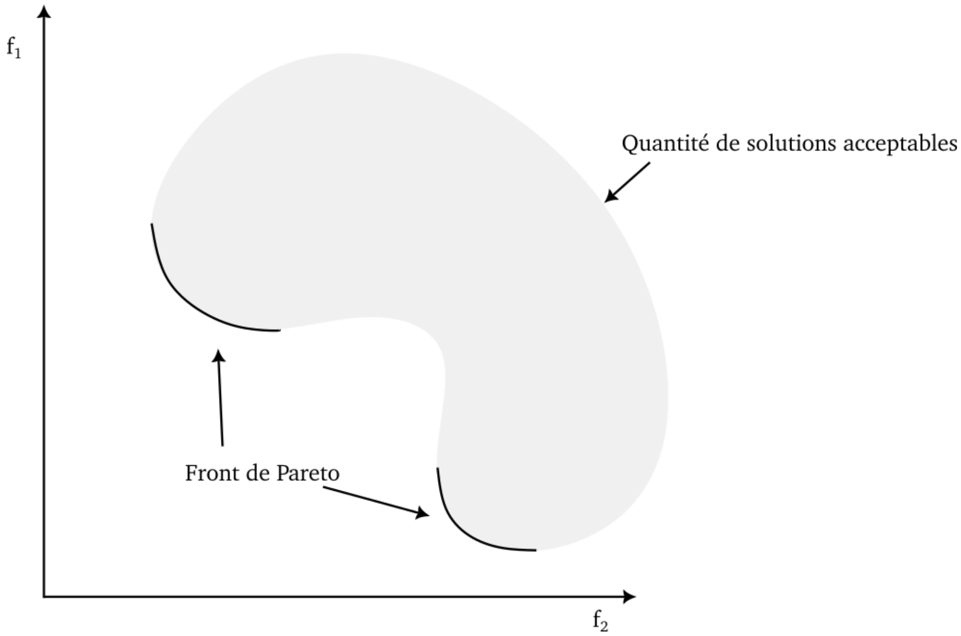

Figure 3: Front de Pareto d'un ensemble de solutions

L'objectif d'une méthode d'optimisation multicritère est de trouver un point selon les préférences sur le front de Pareto ou même de trouver plusieurs points qui se trouvent sur le front de Pareto. La présentation de quelques méthodes d'optimisation multicritères fera partie d'un deuxième article.

4 Résumé

L'optimisation consiste à prendre les meilleures décisions possibles pour atteindre un objectif. Un problème d'optimisation se compose d'un modèle d'optimisation, d'un modèle d'analyse et d'un algorithme d'optimisation. En fonction de la nature et de la complexité du problème, il convient de choisir un algorithme d'optimisation approprié. Dès que plusieurs objectifs sont poursuivis, on parle d'optimisation multicritère. Dans ce cas, il n'y a plus une seule solution optimale, mais à la place, un ensemble de points non-dominés qui forment le front de Pareto.

5 Bibliographie

[1] **Bünner, M. (2019):** Optimierung für Wirtschaftsingenieure. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden.

[2] **Schumacher, A. (2020):** Optimierung mechanischer Strukturen. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

[3] **Harzheim, L. (2008):** Strukturoptimierung. In: *Grundlagen und Anwendungen. Verlag Harri Deutsch*.

[4] **Scholz, D. (2018):** Optimierung interaktiv. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

[5] **Ehrgott, M. (2005):** Multicriteria optimization. Springer, Berlin, New York.

[6] **Pareto, V. (1919):** Manuale di economia politica: con una introduzione alla scienza sociale. Società editrice libraria.

[7] **Chiandussi, G., Codegone, M., Ferrero, S. und Varesio, F. E. (2012):** Comparison of multi-objective optimization methodologies for engineering applications. In: *Computers & Mathematics with Applications*. 63, 912–942.